数理解析研究所講究録
第 1708 巻 2010 年 21-25

実閉体の順序極小拡張におけるデファイナブルファイバー束について

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、実閉体 R の通常の構造 $(R,+,\cdot,>)$ の順序極小拡張 $\mathcal{N}=(R,+,\cdot,>,...)$ において、デファイナブルファイバー束のホモトピー性質について考察する。順序極小構造は、実数体の順序極小拡張 $\mathcal{M}=(\mathbb{R},+,\cdot,>,\dots)$ に限っても、[10] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブルカテゴリーに関しては、[2], [3] などに性質がまとめられている。また、[11] では、少し一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきとし、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N}=(R,+,\cdot,>,...)$ で考えるものとする。

2. ファイバー束とデファイナブルファイバー束

Hausdorff 空間 G が位相群とは、G が群であって、その群演算 $G\times G\to G, G\to G$ が連続となることである。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 14P20, 03C64.
Keywords and Phrases. 順序極小構造, デファイナブルファイバー束, デファイナブルベクトル束, 実閉体, ホモトピー性質.

Gを位相群、Fを位相空間とする。FがG空間とは、FがGの連続群作用$\phi : G \times F \to F$をもつことである。ここでは、$\phi(g,x)$をgxと書く。GのFへの作用が効果的とは、任意に$g, g' \in G$をとるとき、任意の$f \in F$に対して、$gf = g'f$ならば、$g = g'$となることである。

定義 2.1. 位相空間E, X, 位相群K, Kの効果的作用をもった位相空間Fと全射連続写像$p : E \to X$の五つの組$\eta = (E, p, X, F, K)$がファイバー束とは、次の二つの条件を満たすことである。

(1) Xの開被覆$\{U_i\}$と同相写像$\phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$が存在して、$p = p_{U_i} \circ \phi_i$となる。ただし、$p_{U_i} : U_i \times F \to U_i$を射影とする。

(2) $p_i : U_i \times F \to F$を射影とし、$x \in U_i$に対して、$\phi_{i,x} : p^{-1}(x) \to F$を$\phi_{i,x}(z) = p_i \circ \phi_i(z)$と定義する。$x \in U_i \cap U_j$に対して、$\theta_{ji} := \phi_{j,x} \circ \phi_{i,x}$とするとき、$\theta_{ji} \in K$かつ$\theta_{ji} : U_i \cap U_j \to K$が連続である。

このとき、Eを全空間, Xを底空間, pを射影, Fをファイバー, Kを構造群といい、$\{\phi_i, U_i\}$を局所自明化という。

定義 2.2. $\eta = (E, p, X, F, K), \eta' = (E', p', X', F, K)$をファイバー束とする。

(1) 連続写像$\overline{f} : E \to E'$がファイバー束写像とは、以下の二つの条件を満たすことである。

(a) 連続写像$f : X \to X'$が存在して、$f \circ p = p' \circ \overline{f}$となる。

(b) $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}, \{V'_\mu, \phi'_\mu\}$をそれぞれ$\eta, \eta'$の局所自明化とする。$U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \neq \emptyset$となる任意の$\alpha, \mu$に対して、$f_{\mu\alpha}(x) = \phi'_{\mu, f(x)} \circ \overline{f} \circ \phi_{\alpha,x}^{-1}$とするとき、$f_{\mu\alpha} \in K$かつ$f_{\mu\alpha} : U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \to K$が連続である。

(2) ファイバー束写像$\overline{f} : E \to E'$がファイバー束同値写像とは、$\overline{f}$とfが同相写像であって、$(\overline{f})^{-1}$もファイバー束写像であることである。

(3) ファイバー束同値写像$\overline{f} : E \to E'$がファイバー束同型写像とは、$X = X'$, $f = id_X$であることである。

連続写像$f, h : X \to Y$がホモトピックとは、連続写像$H : X \times [0,1] \to Y$が存在して、任意の$x \in X$に対して、$H(x,0) = f(x)$かつ$H(x,1) = h(x)$となることである。

定理 2.3 ([9]). $\eta = (E, p, X, F, K)$をパラコンパクト空間上のファイバー束とし、$f, h : Y \to X$をパラコンパクト空間の間のホモトピックな連続写像とする。このとき、引き戻し束$f^*(\eta)$と$h^*(\eta)$はファイバー束同型である。

定義 2.4. *(1)* デファイナブル集合 G がデファイナブル群とは、G が群であって、その演算 $G \times G \to G, G \to G$ がデファイナブル写像となることである。

(2) Y をデファイナブル集合とする。Y がデファイナブル G 作用をもったデファイナブル集合とは、連続群作用 $G \times Y \to Y$ が存在して、それがデファイナブル写像となることである。

セミアルジェブリック空間 ([1]) の拡張として、デファイナブル空間 ([2]) を考えることができる。

定義 2.5. *(1)* デファイナブルファイバー束 *(*[7], [8]*)* は、E をデファイナブル空間, X をデファイナブル集合, 開被覆を有限デファイナブル開被覆, 局所自明化写像の個数を有限個, 同相写像をデファイナブル同相写像と置き換えて定義する。

(2) デファイナブル束写像、デファイナブル束同値写像、デファイナブル束同型写像、引き戻し束を同様に定義できる。

$\mathcal{N} = \mathcal{M}$ で、底空間がコンパクトの場合は、以下のホモトピー性質が知られていた。

定理 2.6 ([8]). $\mathcal{N} = \mathcal{M}$、$\eta = (E, p, X, F, K)$ をデファイナブルファイバー束、$f, h : Y \to X$ をホモトピックなデファイナブル写像とする。Y がコンパクトならば、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブル束同型である。

また、[6] より、$\mathcal{N} = \mathcal{M}$ のとき、デファイナブル集合間の写像 $f, h : X \to Y$ に対して、f と h がホモトピックならば、f と h はデファイナブリーホモトピックとなる。つまり、デファイナブル写像 $H : Y \times [0,1] \to X$ が存在して、任意の $x \in Y$ に対して、$H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = h(x)$ となる。

ここでは、定理 2.6 の拡張として、以下を得た。

定理 2.7 ([5]). $\eta = (E, p, X, F, K)$ をデファイナブルファイバー束とし、$f, h : Y \to X$ をデファイナブル写像とする。f と h がデファイナブリーホモトピックならば、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブル束同型である。

定理 2.7 により、定理 2.6 の Y がコンパクトの条件は、除けることがわかる。

定理 2.7 の証明の鍵となる命題が以下である。

命題 2.8 (3.2 [4]). デファイナブル集合 $X \times [0,1]$ のデファイナブル開集合 $\{V_j\}_{j=1}^p$ による任意の有限開被覆に対して、X の有限デファイナブル開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^q$ が存在して、各 i に

対して、デファイナブル関数 $0=\phi_{i,0}<\cdots<\phi_{i,k_i}=1:U_i\to R$ が存在して、$1\le i\le q$ かつ $0\le l<k_i$ を満たす各 (i,l) に対して、ある j があって、$\{(x,y)|x\in U_i,\phi_{i,l}(x)\le y\le \phi_{i,l+1}(x)\}\subset V_j$ となる。

3. デファイナブル G ファイバー束とデファイナブル G ベクトル束

定義 3.1. G をデファイナブル群とする。

(1) デファイナブルファイバー束 (E,p,X,F,K) がデファイナブル G ファイバー束とは、E がデファイナブル G 空間であり、その G 作用がデファイナブル G 束同値写像であって、X がデファイナブル G 集合で、p がデファイナブル G 写像となることである。

(2) デファイナブル G ファイバー束がデファイナブル G ベクトル束とは、$F=R^n, K=GL_n(R)$ となることである。

定義 3.2. G をデファイナブル群とする。Ω を n 次元 G 表現空間、$B:G\to O_n(R)$ をその表現写像とする。$M(\Omega)$ を R 係数の n 次正方行列全体のベクトル空間で、G 作用が $(g,A)\in G\times M(\Omega)\mapsto B(g)AB(g)^{-1}\in M(\Omega)$ とする。任意の自然数 k に対して、$\gamma(\Omega,k)=(E(\Omega,k),u,G(\Omega,k)), G(\Omega,k)=\{A\in M(\Omega)|A^2=A, A'=A, TrA=k\}, E(\Omega,k)=\{(A,v)\in G(\Omega,k)\times\Omega|Av=v\}, u:E(\Omega,k)\to G(\Omega,k), u((A,v))=A$ と定義し、$\gamma(\Omega,k)$ を Ω と k に付随した普遍 G ベクトル束という。ただし、A' は A の転置行列を表すとする。

定義 3.3. G をデファイナブル群とする。デファイナブル G ベクトル束 $\eta=(E,p,X)$ が強デファイナブルとは、デファイナブル G 写像 $f:X\to G(\Omega,k)$ が存在して、η と $f^*(\gamma(\Omega,k))$ がデファイナブル G ベクトル束同型となることである。ただし、k は η の階数を表すものとする。

定理 3.4 ([5]). G を有限群とするとき、任意のデファイナブル G ベクトル束は強デファイナブルである。

References

[1] H. Delfs and M. Knebusch, *Semialgebraic topology over a real closed field II: Basic theory of semialgebraic spaces*, Math. Z. **178** (1981), 175–213.

[2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.
[4] M.J. Edmundo *O-minimal Čech cohomology*, Quart. J. Math. **59** (2008), 213-220.
[5] T. Kawakami, *Definable fiber bundles in an o-minimal expansion of a real closed field*, preprint.
[6] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **55**, (2004), 1–15.
[7] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.
[8] T. Kawakami, *Homotopy property for definable fiber bundles*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53** (2003), 1-6.
[9] R. K. Lashof, *Equivariant Bundles*, Illinois J. Math. **26(2)** (1982), 257–271.
[10] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751-777.
[11] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.